Inhaltsverzeichnis

1 Random Processes Seite 165

1.1 Kennwerte

Verteilungsfunktion (1.Dim): $F_X(x_1;t_1) = P\{X(t_1) \leq x_1\}$ $F_X(x_1,x_2;t_1,t_2) = P\{X(t_1) \leq x_1; X(t_2) \leq x_2\}$

Dichtefunktion (1.Dim): $f_X(x_1;t_1) = \frac{\partial F_X(x_1;t_1)}{\partial x_1}$

Verteilungsfunktion (2.Dim): $F_X(x_1,x_2;t_1,t_2) = P\{X(t_1) \leq x_1; X(t_2) \leq x_2\}$

Dichtefunktion (2.Dim): $f_X(x_1,x_2;t_1,t_2) = \frac{\partial^2 F_X(x_1,x_2;t_1,t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$

1.2 statistischer Mittelwert

Erwartungswert: $\mu_X(t) = E[X(t)] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_X(x;t)\,dx$

Autokorrelation: $R_{XX}(t_1,t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 \overbrace{f_X(x_1,x_2;t_1,t_2)}^{\text{Amplitudendichtefkt.}}\,dx_1\,dx_2$

Autokovarianz: Korrelieren die zwei Signale nicht $\Rightarrow$ Autokovarianz $\stackrel{!}{=} 0$
$C_{XX}(t_1,t_2) = E\{[X(t_1) - \mu_X(t_1)][X(t_2) - \mu_X(t_2)] = R_{XX}(t_1,t_2) - \mu_X(t_1)\mu_X(t_2)$

1.3 Stationärität Seite 167

1.3.1 Streng-Stationärer Zufallsprozess (Strict-Sense Stationary(SSS))

Statische Eigenschaften des Prozesses sind unabhängig von einer beliebigen Zeitverschiebung c: $f_X(x_1,x_2,\ldots,x_n;t_1,t_2,\ldots,t_n)$
$f_X(x_1,x_2,\ldots,x_n;t_1+c,t_2+c,\ldots,t_n+c)$
Wichtige Eigenschaften

- $E[X(t)] = \mu_X$
- $R_{XX}(t_1,t_2) = R_X(\tau), \text{mit} \tau = t_2 - t_1$
- $C_{XX}(t_1,t_2) = R_X(\tau) - \mu_X^2$
- Der Zusammenhang von $X(t)$ und $X(t+\tau)$ hängt nicht von der Zeit t sondern nur vor der Zeitdifferenz τ ab.
- Jeder streng stationäre Prozess ist auch schwach stationär

1.3.2 Schwach stationäre Zufallsprozess (Wide-Sense Stationary (WSS))

Ein Zufallsprozess ist schwachstationär falls ein Mittelwert konstant ist und seine Autokorrelation nur von der Zeitdifferenz τ abhängig ist.
Wichtige Eigenschaften

- $E[X(t)] = \mu_X$
- $R_{XX}(t_1,t_2) = R_X(\tau), \text{mit} \tau = t_2 - t_1$
- $C_{XX}(t_1,t_2) = R_X(\tau) - \mu_X^2 = C_{XX}(\tau)$
- Jeder streng stationäre Prozess ist auch schwach stationär

1.3.3 Zeitmittelwert

$\overline{x} = \sum\limits_{k=0}^{n} p_k(x) \cdot z_k$

1.3.4 Ergodizität

Ein Prozess ist Ergodisch falls die zeitlichen Mittelwerte gleich denen der Schar sind. Falls Prozesse ergodisch sind gilt folgendes:

DC-Level $E[X(t)] = \overline{x} = \langle x(t) \rangle$

DC-Leistung $E[X(t)]^2 = (\overline{x})^2 = \langle x(t) \rangle^2$

Gesammtleistung $E[X^2(t)] = R_{XX}(0) = \overline{x}^2 = \langle x^2(t) \rangle$

AC-Leistung $\sigma_X^2(t) = \langle x^2(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2$

RMS-Level Effektivwert des AC-Signals $\sigma_X(t) = \overline{\sigma}_X$

1.4 Korrelation und Spektraleleistungsdichte (Bei WSS) Seite 169

1.4.1 Autokorrelation

$R_{XX}(\tau) = E[X(t)X(t+\tau)]$

- $R_{XX}(-\tau) = R_{XX}(\tau)$
- $|R_{XX}(\tau)| \leq R_{XX}(0)$
- $R_{XX}(0) = E[X^2(t)]$

1.4.2 Spektraleleistungsdichte oder Leistungs-Spektrum Seite 170

spektrale Leistungsdichte Leistung eines infinitesimal kleinem Freuquenzband

Leistungsdichtespektrum Summe aller spektralen Leistungsdichten auf getragen über der Frequenzachse

$S_{XX}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau) e^{-j\omega\tau}$ (Fouriertransformation)

$\Rightarrow R_{XX}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega) e^{j\omega\tau}$

1.5 Übertragung von X(t) über ein LTI-System Seite 171

$\mu_Y(t) = h(t) * \mu_X(t)$ bei WSS $\mu_Y(t) = H(0) * \mu_X$

1.6 Spezialformen von Zufallsprozessen Seite 172

1.6.1 Gauss'scher Zufallsprozess Seite 172

Allgemein Zu jedem Zeitpunkt t_i ist die Zufallsvariable $X(t_i)$ gaussverteilt
$\mu_i = E[X(t_i)]\ i = 1, \ldots, n$ und $R_{XX}(t_i, t_j) = E[X(t_i)X(t_j)]\ i.j = 1, \ldots, n$ charakterisieren einen gauss'schen Zufallsprozess vollständig

Eigenschaften
Sind $X(t_i)$ und $X(t_j)$ unkorreliert ($C_{XX}(t_i, t_j) \overset{!}{=} 0$ falls, $i \neq j$), so sind die Zufallsvariablen auch unabhängig voneinander,d.h: $f_{XX}(x_i, x_j; t_i, t_j) = f_X(x_i; t_i) \cdot f_X(x_j; t_j)$
Ist ein gauss'scher Prozess WSS ist er zugleich auch SSS
Ein gauss'scher Zufallsprozess $X(t)$ist am Ausgang eines LTI als $Y(t)$ wiederum gaussisch

Beispiel thermisches Rauschen von Widerständen

2.Dim Fall (gauss'sche Verbunddichte) $f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}} \cdot e^{-\frac{(x_1-\mu x_1)^2}{2\sigma_{x_1}^2}} \cdot e^{-\frac{(x_2-\mu x_2)^2}{2\sigma_{x_2}^2}}$

1.6.2 weisses Rauschen Seite 173

Allgemein gleichmässige Leistungsdichte für alle Frequenzanteile: $S_{XX}(\omega) = \frac{\eta}{2}$ und somit $R_{XX}(\tau) = \frac{\eta}{2}\delta(\tau)$

Bilder Schaum seite 174 oben

1.6.3 Bandbeschränktes Rauschen Seite 174

Allgemein Es muss $S_{XX}(\omega) = \begin{cases} \frac{\eta}{2}, & \text{falls } |\omega| \le \omega_B \\ 0, & \text{falls } |\omega| > \omega_B \end{cases}$ gelten

Bilder Schaum seite 174 mitte

1.6.4 Schmalbandiger Zufallsprozess Seite 174

Allgemein Bandbeschränktes weisses Rauschen mit sehr kleiner Bandbreite 2B(f-Achse) bzw. 2W(ω-Achse), werteilt um $\pm\omega_c$

Messung im Zeitbereich Sinusförmiges Signal mit zufälliger Amplitude und Phase

$X(t) = V(t)\cdot\cos[\omega_c t + \Phi(t)]$ wobei $\begin{cases} V(t), & \text{Enveloppen-Funktion} \\ \Phi(t), & \text{Phasenfunktion} \end{cases}$
$X(t) = X_c(t)\cos(\omega_c(t)) - X_s(t)\sin(\omega_c(t))$
$X_c(t) = V(t)\cos(\Phi(t))$; gleichphasiger Anteil
$X_c(t) = V(t)\sin(\Phi(t))$; Quadratur Anteil
$V(t) = \sqrt{X_c^2(t) + X_s^2(t)}$; Enveloppenfunktion
$\Phi(t) = \arctan\frac{X_s(t)}{X_c(t)}$; Phasenfunktion

Eigenschaften

$S_{X_c}(\omega) = S_{X_s}(\omega) = \begin{cases} S_{XX}(\omega-\omega_c) + S_{XX}(\omega+\omega_c), & |\omega| \le W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases}$
$\mu_{X_c} = \mu_{X_s} = \mu_X = 0$
$\sigma^2_{X_c} = \sigma^2_{X_s} = \sigma^2_X$
$E[X_c(t)X_s(t)] = 0$ (unkorreliert und orthogonal)
Ist $X(t)$ ein Gauss-Prozess, sind auch $X_c(t)$ und $X_s(t)$ gaussisch.
Zudem gilt dann: $\begin{cases} V(t), & \text{Rayleigh-verteilt zu jedem Zeitpunkt } t \\ \Phi(t), & \text{gleichverteilt } (0\ldots 2\pi) \text{ zu jedem Zeitpunkt } t \end{cases}$

2 Noise in analog communication system Seite 202

2.1 Additive Geräusch und Signal-to-Noise Ratio Seite 202

Vorraussetzungen für eine einfache Berechnung (gauss'scher Kanal):
- $n(t)$ ist weisses gauss'sches Rauschen mit $S_{nn}(\omega) = \frac{\eta}{2}$
- $n(t)$ ist mittelwertfrei: $E[n] = 0$
- $n(t)$ ist mit $X(t)$ unkorreliert: $E[X\cdot n] = E[X]\cdot E[n] = E[X]\cdot 0 = 0$

wodurch für $E[Y_o^2]$ gilt: - $E[(X_o + n_o)^2] = E[X_o^2] + E[2\cdot X_o\cdot n_o] + E[n_o^2] = S_o + n_o$
Somit ist der Signal/Geräusch-Abstand SNR: $SNR = \frac{S_o}{N_o} = \frac{E[X_o^2]}{E[n_o^2]}$

2.2 Rauschen in Basisband-Systemen Seite 203

Vorraussetzungen für eine einfache Berechnung:
- $X(t)$ ist mittelwertfrei: $E[X] = 0$
- $X(t)$ ist stationär und ergodisch: $< x_\lambda(t) >= E[X] = 0$ (für jedes $x_\lambda(t)$)

- $X(t)$ ist bandbeschränkt: $S_{xx}(\omega) = 0$ für $\omega > W$
- LPF ist ideal und hat eine Bandbreite B mit: $2\pi \cdot B = W$ - der Kanal ist verzerrungsfrei: $X_o(t) = X(t - t_d)$ (t_d verzögerung des Systems)

Signalleistung nach Empfang: $S_o = E[X_o^2(t)] = E[X^2(t - t_d)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{+W} S_{XX}(\omega)\, d\omega = S_X = S_i$

Rauschleistung nach Empfang: $N_o = E[n_o^2(t)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{+W} S_{nn}(\omega)\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{+W} \frac{\eta}{2}\, d\omega = \eta\frac{W}{2\pi} = \eta B$

Signal-Geräusch-Verhältnis nach Empfang: $\left(\frac{S}{N}\right)_o = \frac{S_o}{N_o} = \frac{S_i}{\eta B} = \gamma$

2.3 Rauschen in Amplitudenmodulierten Systemen Seite 204ff

Eingangs-Signal: $Y_i(t) = X_c(t) + n_i(t)$

Eingangs-Rauschsignal: $n_i(t) = n_c(t)\cos(\omega_c t) - n_s \sin(\omega_c t)$

Eingangs-Rauschleistung: $E[n_c^2(t)] = E[n_s^2(t)] = E[n_i^2(t)] = 2\eta B$

2.3.1 (Synchroner Detektor)DSB Systems Seite 205

Übertragungs Signal X_c: $X_c(t) = A_c X(t)\cos(\omega_c t)$

Demodulator Eingangs-Signal: $Y_i(t) = A_c X(t)\cos(\omega_c t) + n_i(t) = [A_c X(t) + n_c(t)]\cos(\omega_c t) - n_s(t)\sin(\omega_c t)$

Demodulator Eingangs-Signal-Leistung: $\left(\frac{S}{N}\right)_i = \frac{S_i}{N_i} = \frac{S_i}{2\eta B}$

Demodulator Ausgangs-Signal: $Y_o(t) = A_c X(t) + n_c(t) = X_o(t) + n_o(t)$

Demodulator Ausgangs-Signal-Leistung: $S_o = E[X_o^2(t)] = E[A_c^2 X^2(t)] = A_c^2 E[X^2(t)] = A_c^2 S_X$

Demodulator Ausgangs-Rausch-Leistung: $N_o = E[n_o^2(t)] = E[n_c^2(t)] = E[n_i^2(t)] = 2\eta B$

Demodulator Ausgangs-SNR: $\left(\frac{S}{N}\right)_o = \frac{S_o}{N_o} = \frac{A_c^2 S_X}{2\eta B}$ ist gliech gut wie die Basisbandübertragung

Detektor-Gewinn (Mass für die "Effizienz" des Demodulators): $\alpha_d = \frac{(S/N)_o}{(S/N)_i} = \frac{S_i/(\eta B)}{S_i/(2\eta B)} = 2$

2.3.2 (Synchroner Detektor)Am Systems Seite 206

Übertragungs Signal X_c: $X_c(t) = A_c[1 + \mu X(t)]\cos(\omega_c t)$

Demodulator Eingangs-Signal: $Y_i(t) = A_c(1 + \mu X(t))\cos(\omega_c t) + n_i(t)$ mit $\mu \leq 1$ und $|X(t)| \leq 1$

Demod. Eingangs-Signal-Leistung: $S_i = \frac{1}{2}E[A_c^2(1 + \mu^2 X^2(t))] = \frac{1}{2}E[A_c^2(1 + \mu X(t))^2] = \frac{1}{2}A_c^2(1 + \mu^2 S_X)$

Demodulator Ausgangs-Signal: $Y_o(t) = A_c\mu X(t) + n_c(t) = X_o(t) + n_o(t)$

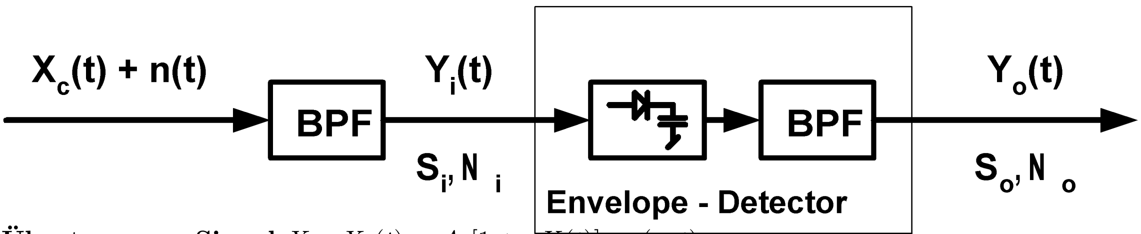
Demodulator Ausgangs-Signal-Leistung: $S_o = A_c^2\mu^2 S_X = \frac{2\mu^2 S_X}{1 + \mu^2 S_X} S_i$

Demodulator Ausgangs-Rausch-Leistung: $N_o = E[n_o^2(t)] = E[n_c^2(t)] = E[n_i^2(t)] = 2\eta B$

Demodulator Ausgangs-SNR: $\left(\frac{S}{N}\right)_o = \frac{S_o}{N_o} = \frac{\mu^2 S_X}{1 + \mu^2 S_X}\left(\frac{S_i}{\eta B}\right) = \frac{\mu^2 S_X}{1 + \mu^2 S_x}\gamma \Rightarrow \left(\frac{S}{N}\right)_o \leq \frac{\gamma}{2}$ mind. 3dB schlechter als Baisbandübertragung

Detektor-Gewinn (Mass für die "Effizienz" des Demodulators): $\alpha_d = \frac{(S/N)_o}{(S/N)_i} = \frac{2\mu^2 S_X}{1 - \mu^2 S_X} \leq 1$

2.3.3 Envelope Detection and Threshold Effect Seite 207



Übertragungs Signal X_c: $X_c(t) = A_c[1 + \mu X(t)]\cos(\omega_c t)$

Demodulator Eingangs-Signal: $Y_i(t) = A_c(1 + \mu X(t))\cos(\omega_c t) + n_i(t) = V(t)\cos(\omega_c t - \phi(t))$

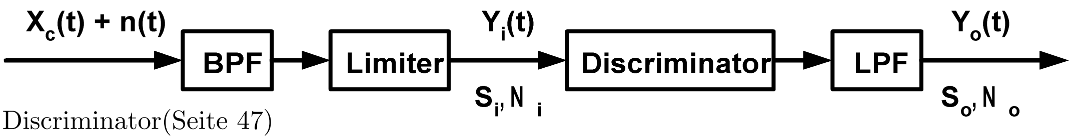
Large-SNR (Signaldominanz $(S/N)_i >> 1$) Seite 207

- **Demodulator Ausgangs-Signal:** $Y_o(t) = A_c \mu X(t) + n_c(t) = X_o(t) + n_o(t)$
- **Demodulator Ausgangs-SNR:** $\left(\frac{S}{N}\right)_o = \frac{S_o}{N_o} = \frac{\mu^2 S_X}{1+\mu^2 S_x}\gamma$ performance identical to synchronous detector

Small-SNR (Geräuschdominanz $(S/N)_i << 1$) Seite 207

- **Envelope (Signal-Approximation):** $V(t) \approx V_n(t) + A_c[1 + \mu X(t)]\cos(\phi_n(t))$
  - Amplitude wird dominiert von $V_n(t)$
  - Nutzsignal $X(t)$ wird zusätzlich moduliert mit zufälligem $\phi(t)$
  - $X(t)$ ist nur noch in stark deformierter Form vorhanden
- **Allgemein:** Der Übergang zwischen ausreichender Übertragungsqualität und unbrauchbarer Übertragung beginnt ab $(S/N)_i$ 10 dB und erfolgt sehr schnell: "Schwellwert Effekt"

2.4 Rauschen in Winkelmodulierten Systemen Seite 208ff



Discriminator(Seite 47)

Übertragungs-Signal: $X_c(t) = A_c\cos(\omega_c t + \phi(t))$ mit $\phi(t) = \begin{cases} k_p X(t) & \text{for PM} \\ k_f \int\limits_{-\infty}^{t} X(\tau)\,d\tau & \text{for FM} \end{cases}$

Rauschsingal am Eingang: $n_i(t) = v_n(t)\cos(\omega_c t + \phi_n(t))$ mit $N_i = 2(D+1)B_m \cdot \eta$

Hubverhältnis D: $D = \frac{\Delta f}{B_m} = \frac{\Delta\omega}{W_m}$

Eingangs-SNR (CNR (Carrier-to-noise Ratio)): $\left(\frac{S}{N}\right)_i = \frac{A_c^2}{2\eta B_T} = \frac{A_c^2}{4(D+1)B_m\eta} \neq f(X(t))$

Eingangs-Signal: $Y_i(t) = V(t)\cos(\omega_c t + \theta(t))$

Eingangs-Amplitude: $V(t) = \sqrt{(A_c\cos(\phi) + v_n(t)\cos(\phi_n(t)))^2 + (A_c\sin(\phi) + v_n(t)\sin(\phi_n(t)))^2}$

Argument / Winkel: $\theta = tan^{-1}\frac{A_c\sin(\phi) + v_n(t)\sin(\phi_n(t))}{A_c\cos(\phi) + v_n(t)\cos(\phi_n(t))}$

Interpretation: Der Limiter unterdrückt sämtliche Amplitudenschwankungen von $V(t)$. Signalanteile (ebenso Rauschen) sind nur in der Phase enthalten. SNR wird daher nur von der Phase beeinflusst.

Ausgangs-Signal: $Y_o = \begin{cases} \theta(t) & \text{for PM} \\ \frac{d\theta(t)}{dt} & \text{for FM} \end{cases}$

2.4.1 Signal-dominiert $(C/N >> 1)$ Seite 209

Ausgangs-Signal: $Y_o = \begin{cases} \theta(t) = k_p X(t) + \dfrac{n_s(t)}{A_c} & \text{for PM} \\ \dfrac{d\theta(t)}{dt} = k_f X(t) + \dfrac{n_s'(t)}{A_c} & \text{for FM} \end{cases}$

2.4.2 $(S/N)_o$ in PM Seite 210

Ausgangs-Signal-Leistung: $S_o = E[k_p^2 X^2(t)] = k_p^2 S_X$

Ausgangs-Rausch-Leistung: $N_o = E[\frac{1}{A_c^2} n_s^2(t)] = \frac{1}{A_c^2} 2\eta B$

Ausgangs-SNR: $\left(\frac{S}{N}\right)_o = \frac{k_p^2 A_c^2 S_X}{2\eta B} = k_p^2 S_X \gamma$,wobei γ Eingangs-SNR im Basisband ist

2.4.3 $(S/N)_o$ in FM Seite 211

Ausgangs-Signal-Leistung: $S_o = E[k_f^2 X^2(t)] = k_f^2 E[X^2(t)] = k_f^2 S_X$

Ausgangs-Rausch-Leistung: $N_o = E[\frac{1}{A_c^2}(n_s'(t))^2] = \frac{1}{A_c^2} E[(n_s'(t))^2] = \frac{3\eta W^3}{3A_c^2 2\pi}$

Ausgangs-SNR: $\left(\frac{S}{N}\right)_o = \frac{3A_c^2 2\pi k_f^2 S_X}{2\eta W^3} = 3\left(\frac{k_f^2 S_X}{W^2}\right)\gamma = 3D^2 S_X \cdot \gamma = \frac{3D^2 A_c^2 Sx}{2\eta B}$,wobei γ Eingangs-SNR im Basisband ist

2.4.4 Schwellwert Effekt für $(S/N) << 1$ Seite 211

Phase: $\theta(t) \approx= \phi_n(t) + \frac{A_c}{v_n(t)} \sin(\phi(t) - \phi_n(t))$

- Phase wird dominiert von $\phi_n(t)$
- Nutzsingal $\phi(t)$ ist in unkenntlicher Form innerhalb von θ vorhanden

3 Leistungen Tabelle

4 Opimaler Detektor Seite 226

Rauschen führt zu Bitfehlern.
- Wir führen ein Qualitätsmass für die Minimale Bitfehlerrate P_e bei maximaler Übertragungsrate in einem Digitalen Übertragungssystem ein.
- Grosses Rauschen (kleine SNR) kann zu einer fehlerhaften Detektion der gesendeten Symbole führen.
- Der Empfänger soll so optimiert werden, dass er für den vorgegebenen digitalen Datenstrom die Bitfehlerrate P_e minimiert (= optimaler Detektor) **Vorraussetzungen**

Gauss'scher Kanal:
- Verzerrungsfrei (ohne lineare / nicht-lineare Verzerrungen) - Verzerrungsfrei = keine Intersymbol Interferenz (ISI) - Mittelwertfreies additives weisses gauss'sches Rauschen

Lineares Filter: Maximierung der SNR zu den optimalen Abtastzeitpunkten nT

Detektor: Entscheidung, welches Symbol gesendet wurde (soft/hard)

4.1 Binäres Übertragungssystem Seite 226

Zwei mögliche Eingangssignale: $s_i(t) = \begin{cases} s_1(t) & 0 \le t \le T \quad \text{for } 1 \\ s_2(t) & 0 \le t \le T \quad \text{for } 0 \end{cases}$
Beispiele für $s_i(t)$: NRZ, Manchester, ASK, FSK etc.

Empfänger Eingangs-Signal: $r(t) = s_i(t)+n(t) \quad i = 1,2 \quad 0 \le t \le T$ wobei $n(t)$: zero mean AWGN(Additive White Gaussian Noise)

Aufbereitung Block1: Empfangssignal $r(t)$ wird mit linearem Filter aufbereitet:
- Ziel: viel Signalanteil aber nur wenig Rauschen (SNR soll maximalsein) (Filtern)
- Möglichkeiten: 1. Matched Filter 2. Korrelation

Abtastblock Block2: Das Kontinuierliche Signal wird Diskretisiert und der Detektor enscheidet durch eine Schätzung, welches Signal gesendet wurde.
Hypothese H_1(falls $z(nT) > \lambda$) $\Rightarrow S1$ wurde gesendet
Hypothese H_2(falls $z(nT) < \lambda$) $\Rightarrow S2$ wurde gesendet

Hard-Decision: Es wird eine feste Entscheidung ("0" oder "1")

Soft-Decision: Es wird eine Wahrscheindlichkeit für "0" oder "1" bestimmt und verarbeitet

4.2 Fehler-Wahrscheindlichkeit und maximum Likelihood Detector Seite 227

4.2.1 Bitfehler-Wahrscheindlichkeit Seite 227

Im Binären fall mit Hard-decision können zwei Fehler fälle auftreten: Es wird S1 empfangen obschohn S2 geschickt wurde und umgekehrt.
dies ergibt folgende Fehlerwahrscheindlichkeit: $P_e = P(H_2|s_1) \cdot P(s_1) + P(H_1|s_2) \cdot P(s_2)$

4.2.2 Maximum Likelihood Detector Seite 227

Vorraussetzungen Bedingte Wahrscheindlichkeiten $f(z|s_1)$ und $f(z|s_2)$
Der Detektor entscheidet wie Folgt:
$Hypothese H1 : \text{falls} f(z|s_1) \cdot P(s_1) > f(z|s_2) \cdot P(s_2)$
$Hypothese H2 : \text{falls} f(z|s_1) \cdot P(s_1) < f(z|s_2) \cdot P(s_2)$
Oder ausgedrückt mit WSK-Verhältnis (Likelihood ratio) $\Lambda(z)$:
$H_1 : \text{falls } \Lambda(z) = \dfrac{f(z|s_1)}{f(z|s_2)} > \dfrac{P(s_2)}{P(s_1)} \qquad H_2 : \text{falls } \Lambda(z) = \dfrac{f(z|s_1)}{f(z|s_2)} < \dfrac{P(s_2)}{P(s_1)}$

	Baseband	DSB-SC	AM Coherent	AM Envelope	PM	FM
Nachrichtensignal	Zufallsprozess $X(t)$ mit $\lvert X(t)\rvert \leq 1$ bzw. $\lvert x_\lambda(t)\rvert \leq 1$ für alle λ des Ergebnisraums S					
Leistung S_X von $X(t)$	$S_X = S_X(t) = E\left[X^2(t)\right] \leq 1$, (weil $\lvert X(t)\rvert \leq 1$)					
Bandbreite von $X(t)$	B					
Eingangsnutzsignal $X_i(t)$	$X(t)$	$X(t)A_c\cos(\omega_c t)$	$A_c(1+\mu X(t))\cos(\omega_c t)$		$A_c\cos(\omega_c t + k_p X(t))$	$A_c\cos(\omega_c t + k_f \int_{-\infty}^{t} X(\tau)\,d\tau)$
Leistung S_i von $X_i(t)$	S_X	$\frac{1}{2}A_c^2 S_X$	$\frac{1}{2}A_c^2(1+\mu^2 S_X)$		$\frac{1}{2}A_c^2$	$\frac{1}{2}A_c^2$
Bandbreite von $X_i(t)$	B	$2B$	$2B$		$2(D+1)B$	$2(D+1)B$
Rauschleistung am Eingang	ηB	$2\eta B$	$2\eta B$		$2(D+1)\eta B$	$2(D+1)\eta B$
SNR am Eingang $\left(\frac{S}{N}\right)_i$	$\frac{S_i}{\eta B}$	$\frac{\frac{1}{2}A_c^2 S_X}{2\eta B}$	$\frac{\frac{1}{2}A_c^2(1+\mu^2 S_X)}{2\eta B}$		$\frac{\frac{1}{2}A_c^2}{2(D+1)\eta B}$	$\frac{\frac{1}{2}A_c^2}{2(D+1)\eta B}$
Ausgangsnutzsignal $X_o(t)$	$X(t)$	$A_c X(t)$	$A_c \mu X(t)$		$k_p X(t)$	$k_f X(t)$
Leistung S_o von $X_o(t)$	S_X	$A_c^2 S_X$	$A_c^2\mu^2 S_X$		$k_p^2 S_X$	$k_f^2 S_X$
Rauschleistung am Ausgang	ηB	$2\eta B$	$2\eta B$		$\frac{1}{A_c^2/2}\eta B$	$\frac{1}{3}\frac{(2\pi B)^2}{A_c^2/2}\eta B$
SNR am Ausgang $\left(\frac{S}{N}\right)_o$	$\frac{S_i}{\eta B}$	$\frac{A_c^2 S_X}{2\eta B}$	$\frac{A_c^2\mu^2 S_X}{2\eta B}$		$\frac{k_p^2 A_c^2 S_X}{2\eta B}$	$\frac{3D^2 A_c^2 S_X}{2\eta B}$
$\left(\frac{S}{N}\right)_o$ ausgedrückt mit $\boldsymbol{\gamma = \frac{S_i}{\eta B}}$	$\boldsymbol{\gamma}$	$\boldsymbol{\gamma}$	$\frac{\mu^2 S_X}{1+\mu^2 S_X}\boldsymbol{\gamma}$		$k_p^2 S_X \boldsymbol{\gamma}$	$3D^2 S_X \boldsymbol{\gamma}$

Modulationsindex: $\mu = \frac{\lvert\min(m(t))\rvert}{A_m}$	Mittlere Rauschleistung $\eta = 4\cdot k\cdot T$ $k = 1,38\cdot 10^{-23}\,\frac{W_s}{K}$	Phasen-Hubkonstante: $D = \frac{\Delta f}{B_m} = \frac{\Delta\omega}{\omega_m} = \frac{\text{max. Frequenzhub}}{\text{Bandbreite von } m(t)}$
Seite 47	Seite 204	Seite 72

4.2.3 Fehler-Wahrscheindlichkeit mit Gauss'schem Rauschen Seite 228

Ein gaussverteilter Zufallsprozess bleibt nach einem LTI-System gaussverteilt, womit für die WSK-Dichte von n_o gilt: $f_{n_o}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{n_o}} e^{\frac{-\xi^2}{2\sigma^2_{n_o}}}$ Für z ergeben sich zwei (überlappende) Gaussverteilungen (Bild 9-2 Seite 228))
Falls $P(s_1) = P(s_2) = 0.5$ dann ist $\lambda_o = \frac{(a_1 + a_2)}{2}$ und folglich $P_e = Q\left(\frac{a_1 - a_2}{2\sigma_{n_o}}\right)$ (Tabelle Seite 326)

4.3 Optimum Detection Seite 229

Mehr Info über Block1 von Seite 227.

4.3.1 The Matched Filter Seite 229

Das lineare Filter $H(\omega)$ soll die Fehler-WSK zum Zeitpunkt T minimieren:
Maximieren von $(a_1 - a_2)$ bei gleichzeitiger Minimierung von n_o:

$$a(T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega)S(\omega)e^{j\omega T} d\,\omega$$

$$N_o = E[n_o^2(T)] = \frac{\eta}{2 \cdot 2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 \, d\omega$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = \frac{a^2(T)}{N_o} = \frac{\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 |\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)S(\omega)e^{j\omega T} \, d\omega|^2}{\left(\frac{\eta}{2 \cdot 2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 \, d\omega}$$

Ausgangs-SNR: $\left(\frac{S}{N}\right)_o \leq \frac{2}{\eta \cdot 2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 \, d\omega = \frac{2E}{\eta} \Rightarrow \left(\frac{S}{N}\right)_{o_max} = \frac{2E}{\eta}$ Gemäss Cauchy-Schwarz ist SNR_o Maximals wenn $H(\omega) = S^*(\omega) \cdot e^{-j\omega T}$
Dies führt zu einer Impulsantwort von: $h(t) = \begin{cases} s(T-t) & \text{für } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

4.3.2 Correlator Seite 230

Eine Art des Matched Filters

Ausgang des Kausalen Filtes:

$z(t) = \int_0^t r(\tau)s(T - (t-\tau)) \, d\tau$ für den Zeitpunkt T gilt dann: $z(T) = \int_0^T r(\tau)s(\tau) \, d\tau$
Für Zeitpunkt T (und nur für T) kann also (anstatt des Matched Filters) $r(t)$ mit $s(t)$ korreliert werden.

4.3.3 Optimum Detection Seite 230

Um die Fehlerwahrscheindlichkeit P_e zu minimieren, muss ein lineares Filter gewählt werden, welches $\frac{(a_1 - a_2)^2}{\sigma^2_{n_o}}$ maximiert. Im binären Fall kann $\left(\frac{S}{N}\right)_o$ mit der korrelation des Differenzsignals $s_1(t) - s_2(t)$ optimiert werden. Die Korrelation auf das Differenzsignal kann maximal den Energieinhalt E_d des Differenzsignals $s_1(t) - s_2(t)$ annehmen: $E_d = \int_0^T [s_1(t) - s_2(t)]^2 \, dt$
Dies ergibt dann: $\left(\frac{S}{N}\right)_o = \frac{(a_1 - a_2)^2}{\sigma^2_{n_o}} = \frac{E_d}{\eta/2} = \frac{2E_d}{\eta}$
Dieser Ausdruck ist aber gerade das Quadrat des Arguments der Fehler-WSK des ML-Detektors. Eingesetzt ergibt dies: $P_e = Q(\frac{a_1 - a_2}{2\sigma_{n_o}}) = Q(\sqrt{\frac{E_d}{2\eta}})$

4.3.4 einige Beispiele von Fehler-WSK's P_e Seite 231

- Die Fehler-WSK P_e berechnet sich aus der Energie des Differenzsignals E_d, kann aber in einem zweiten Schritt auch mit der **mittleren Energie pro Bit** E_b ausgedrückt werden.
- Die Beispiele zeigen, dass durch Wahl einer geeignete Modulationsart oder der Linecodes (z.B. bipolar NRZ statt unipolar NRZ) die Bitfehlerrate P_e bei gleicher Signal- und Rauschleistung optimiert werden kann.

Unipolare Baisband Signale:

Fehler-WSK: $P_e = Q\left(\sqrt{\frac{A^2T}{2\eta}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{\eta}}\right)$ Mittlere-Bit-Leistung: $E_b = \frac{A^2T}{2}$

Bipolare Baisband Signale:

Fehler-WSK: $P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2A^2T}{\eta}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{\eta}}\right)$ Mittlere-Bit-Leistung: $E_b = A^2T$

ASK:

Fehler-WSK: $P_e = Q\left(\sqrt{\frac{A^2T}{4\eta}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{\eta}}\right)$ Mittlere-Bit-Leistung: $E_b = \frac{A^2T}{4}$

PSK:

Fehler-WSK: $P_e = Q\left(\sqrt{\frac{A^2T}{\eta}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{\eta}}\right)$ Mittlere-Bit-Leistung: $E_b = \frac{A^2T}{2}$

FSK:

Fehler-WSK: $P_e \approx Q\left(\sqrt{\frac{A^2T}{2\eta}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{\eta}}\right)$ Mittlere-Bit-Leistung: $E_b = \frac{A^2T}{2}$

5 Infromationstheorie und Quellenkodierung Seite 245

5.1 Information Content of a Symbol Seite 246

DMS: discrete memoryless source (neues Symbol ist undabhängig von vorhergehenden Symbolen)

DMC: discrete meroryless channel (Ausgang Y_i ist nur abhängig von x_i und nicht von x_k $(k \neq i)$) Informationsgehalt$I(x_i)$ eines Symbols x_i: $I(x_i) = -log_2 P(x_i)[b]$

Eigenschaften:

$I(x_i) \geq 0$
$I(x_i) > I(x_k)$ falls $P(x_i) < P(x_k)$
$I(x_i x_k) = I(x_i) + I(x_k)$ falls x_i und $x_k$unabhängig sind

5.2 Entropie (Mittlerer Informationsgehalt) Seite 246

Entropie: $H(X)$ =Entropie des Alphabets X einer Quelle: $H(X) = E[I(x_i)] = -\sum_i P(x_i)\cdot \log_2 P(x_i)\,[b/Symbol]$

Eigenschaften:

$0 \leq H(X) \leq \log_2 m$ m : Grösse des Alphabets (Anzahl der Symbole)
$0 \leq H(X) \leq 1$ für binäre Quelle

Irrelevanz: bedeutungslose Information

Redundanz: mehrfach vorhandene Information $R(X) = H_{max} - H(X) = log_2 m - H(X)$

Bedingte Entropie:

- **Bedingte Entropie** $H(Y|X)$**:** Informationsbedarf um (aus dem gegebenem X) Y zu bestimmen.
- **Bedingte Entropie** $H(X|Y)$**:** Informationsbedarf um (aus dem beobachtetem Y) X zu bestimmen.
- **Verbund-Entropie** $H(X,Y)$**:** Information des gesamten Kommunikationskanals.
- **Eigenschaften:** $H(X,Y) = H(X|Y) + H(Y)$ bzw. $H(X,Y) = H(Y|X) + H(X)$

Symbolrate: $r\,[Symbole/s]$

Informationsrate: $R = r \cdot H(X) \quad (R \neq R(X))$
Durch Maximierung von $H(X)$ kann bei vorgegebener Symbolrate r die Informationsrate R optimiert werden.
Maximierung von $H(X)$ ist Aufgabe der Quellencodierung

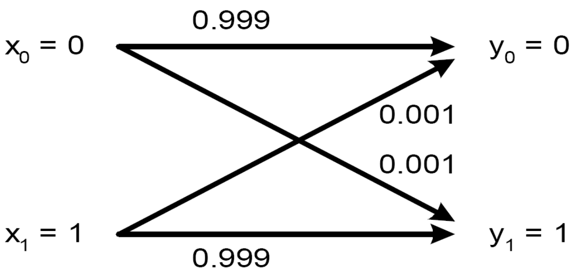
Gegenseitige (mutual) Information: Information, welche vom Ein- zum Ausgang transferiert wird.
$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y)$
Eigenschaften:
$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X) = I(Y;X)$
$I(X;Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y)$

5.3 Diskreter gedächnisloser Kanal Seite 247

Kanalmatrix: $[P(Y|X)] = \begin{bmatrix} P(y_1|x_1) & P(y_2|x_1) & \dots & P(y_n|x_1) \\ P(y_1|x_2) & P(y_2|x_2) & \dots & P(y_n|x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P(y_1|x_m) & P(y_2|x_m) & \dots & P(y_n|x_m) \end{bmatrix}$ dabei gilt: $[P(Y)] = [P(X)][P(Y|X)]$

Verbundmatrix: $[P(Y,X)] = \begin{bmatrix} P(y_1,x_1) & P(y_2,x_1) & \dots & P(y_n,x_1) \\ P(y_1,x_2) & P(y_2,x_2) & \dots & P(y_n,x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P(y_1,x_m) & P(y_2,x_m) & \dots & P(y_n,x_m) \end{bmatrix}$
wobei $P(y_1, x_1)$ die W'heit ist, von x_1 nach y_1 zu gelangen. **Beachte die W'heit von x_1!!!**

Beispiel: Eine diskrete gedächtnisfreie Quelle mit einem Alphabet von zwei Symbolen $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$ sendet ein Nachrichtensignal mit einer Bitrate von 64 kBit/s über einen diskreten gedchtnisfreien Kanal. Das Symbol x_0 tritt bei der Quelle mit einer Wahrscheinlichkeit von $p_0 = 0.9$ auf. Unabhängig vom gesendeten Symbol tritt im Kanal eine Fehlerwahrscheinlichkeit von $p_e = 0.001$ auf.



Kanaldiagramm:
Verbundsmatrix: $[P(Y,X)] = \begin{bmatrix} P(x_o) \cdot P(y_0,x_0) & P(x_0) \cdot P(y_1,x_0) \\ P(x_1) \cdot P(y_0,x_1) & P(x_1) \cdot P(y_1,x_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 \cdot 0.999 & 0.9 \cdot 0.001 \\ 0.1 \cdot 0.001 & 0.1 \cdot 0.999 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8991 & 0.0009 \\ 0.0001 & 0.0999 \end{bmatrix}$

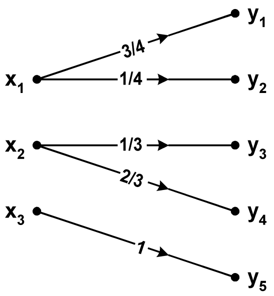
5.4 Kanalkapazität Seite 251

Kanalkapazität pro Symbol C_s: $C_s = maxI(X;Y) \quad [b/symbol]$

Kanalkapazität pro Sekunde C: $C = r \cdot C_s \quad [b/s]$

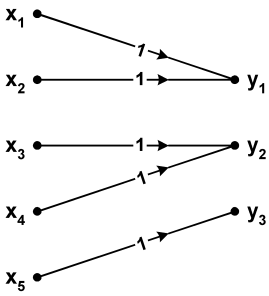
Mögliche Übertragung: es ist möglich, die Information der Quelle zu Übertragen falls gilt:
$H(X) < C_s \quad H(X) \cdot r < C$

Verlustloser Kanal
Kanalmatrix:
$$[P(Y|X)] = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
gegenseitge Information:
$I(X;Y) = H(X)$
Kanalkapazität:
$C_s = \log_2 m$
Kanaldiagramm:

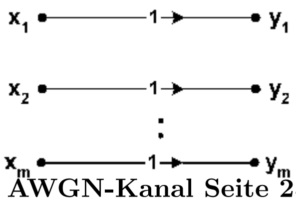


m=Symbol Anzahl n=Bit Anzahl

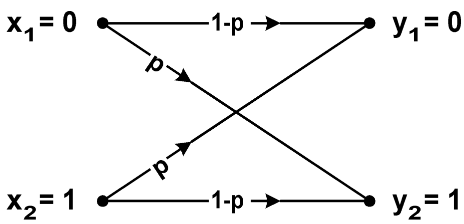
Deterministischer Kanal
Kanalmatrix:
$$[P(Y|X)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
gegenseitige Information:
$I(X;Y) = H(Y)$
Kanalkapazität:
$C_s = \log_2 n$
Kanaldiagramm:



Rauschfreier Kanal
Kanalmatrix:
$$[P(Y|X)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$
immer Einheitsmatrix da $m = n$
gegenseitige Information:
$I(X;Y) = H(X) = H(Y)$
Kanalkapazität:
$C_s = \log_2 m = \log_2 n$
Kanaldiagramm:



Binärer sym. Kanal
Kanalmatrix:
$$[P(Y|X)] = \begin{bmatrix} (1-p) & p \\ p & (1-p) \end{bmatrix}$$
gegenseitige Information:
$I(X;Y) = H(Y) - (-p\,\log_2 p - (1-p)\,\log_2(1-p))$
Kapazität:
$C_s = 1 + p\,\log_2 p + (1-p)\log_2(1-p)$
Kanaldiagramm:



AWGN-Kanal Seite 253:
Kanalausgang: $Y = X + n$
Kanalkapazität C_s: $C_s = \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right)$ $[b/sample]$
Kanalkapazität C: $C = 2BC_s = B\log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right)$ $[b/s]$ 8-ung (S/N) in Leistung $\Rightarrow 10^{\frac{dB}{10}}$
Beispiel: (S/N) = 40 dB, B = 4kHz $\Rightarrow C = 4000 \cdot \log_2(1 + 10^{\frac{40}{10}})$

5.5 Quellenkodierung Seite 253

Der Quellencoder wandelt das Nachrichtensignal einer DMS in eine Symbolfolge mit möglichst kleiner Redundanz um.
- Beispiele für verlustfreie codierung: Zip-File, Morse-Code, Shannon-Fano, Huffmann
- Beispiele für verlustbehaftete codierung: JPEG, MP3

Durchschnittliche Code-Länge: $L = \sum\limits_{i=1}^{m} P(x_i)n_i$

Code effizienz: $\eta = \dfrac{L_{min}}{L} = \dfrac{H(X)}{L}$

Code redundanz: $\gamma = 1 - \eta$

5.6 Klassifizierung von Codes Seite 254

Aufgeführt auf Seite 254 mit Tabelle.

Fixed Length Code 1,2: Jedes Codewort hat gleiche Länge.
BSP: ASCII-Code

Variable Length Code 3,4,5,6: Codewörter können unterschiedliche Länge haben.
BSP: Morse Code, Shannon-Fano, Huffman

Prefix-Free Code 2,3,4,5,6: Kein Codewort ist Präfix (Vorsilbe) eines anderen Codeworts.
BSP: Shannon-Fano / Huffman, nicht Morse

Uniquely Decodable Code 2,4,6: Eine Kette von Codewörtern kann eindeutig wieder in die ursprüngliche Symbolfolge zurückgewandelt werden. Jeder präfixfreie Code ist zugleich eindeutig decodierbar. Nicht präfixfreie Codes sind eindeutig decodierbar, wenn durch die Codesequenzen nachfolgender Codewörter die Decodierung wieder eindeutig wird.

Instantaneous Code: Jeder eindeutig decodierbare Code, welcher nach dem Empfang jedes einzelnen Codeworts sofort ein eindeutiges Symbol liefert, ohne dass nachfolgende Symbole decodiert werden müssen. Jeder Präfixfreie Code ist ein Instantaneous Code. Der nicht präfixfreie Morse Code wird Dank der kurzen Pause zwischen den Codeworten ebenfalls zu einem Instantaneous Code.

Optimal Code: Jeder Instantaneous Code, welcher eine minimale Codelänge besitzt ist ein optimaler Code. Die minimale Codelänge ist dann erreicht, wenn die mittlere Codelänge L gerade der Entropie der Quelle $H(X)$ entspricht, d.h. wenn die Effizienz $\eta = 100\%$ beträgt. Es gilt $L = \sum_i P(x_i) \cdot n_i \geq H(X)$ und $\eta = \frac{H(X)}{L}$

5.7 Kraft'sche Ungleichung Seite 255

Gegeben: ein Quelle mit Alphabet $x_i \quad (i = 1 \ldots n)$
Jedem Symbol x_i wird zwar noch kein binäres Codewort aber eine Codelänge n_i zugewiesen.

Kraft'sche Ungleichung: Die Kraft'sche Ungleichung besagt, dass ein eindeutig und sofort decodierbarer binärer Code gefunden werden kann wenn $K \leq 1$ gilt für $K = \sum_i 2 - n_i$

Anmerkungen: Die Ungleichung hilft nicht zum Auffinden dieses Coedes. Sie macht auch keine Aussage, ob irgendein vorliegender Code eindeutig decodierbar ist.

5.8 Shannon-Fano Codierung Seite 255/256

1. Symbole mit absteigender WSK anordnen
2. Mit Trennung 2 Teilmengen möglichst gleicher WSK bilden
3. Oberer Teilmenge 0, unterer Teilmenge 1 zuordnen
4. Teilmengen weiter unterteilen gemäss Schritt (2)

5.9 Huffman Codierung Seite 255

1. Symbole (bzw. -gruppen) mit absteigender WSK anordnen
2. Unterste zwei Symbole als Symbolgruppe zusammenfassen (Reduktionsschritt)
3. Weiter bei (1) bis nur noch zwei Symbolgruppen vorliegen
4. Der Symbolgruppe mit grösserer WSK 0, der andern 1 zuordnen
5. Letzten Reduktionsschritt rückgängig machen
6. Weiter bei (4) bis für alle Einzelsymbole ein Codewort vorliegt

6 Error Control Coding Seite 282

Durch das beifügen von geeigneter Redundanz wird es möglich Fehler zu erkennen und zu korrigieren.

6.1 Shannon: Kanalvodierungstheorem Seite 282

Gegeben:
- DMS mit Entropie $H(X)[b/Symbol]$
- DMC mit Kanalkapazität $C_s[b/Symbol]$

Theorem:
- Falls $H(X) < C_s$ kann mit geeigneter Kanalcodierung die Fehlerrate der Übertragung beliebig klein gemacht werden.
- Falls $H(X) > C_s$ ist fehlerfreie Übertragung nicht möglich.

Anmerkung: Bitfehler in der Übertragung verunmöglichen nicht etwa einen zuverlässigen Informationsaustausch sondern beschränken in der Praxis die nutzbare Übertragungsrate.

6.2 Blockcodes Seite 283

Codierung von (relativ kleinen) Datenblöcken.
Aus k Eingangs- werden n Ausgangssymbole generiert.
Untergruppen sind: -lineare Blockcodes - zyklische Blockcodes

$(n, k) - Code$**:** generiert aus k Eingangs- n Ausgangssymbole wobei $(n > k)$. Eingangsdatenstrom wird in Blöcke der Länge k unterteilt (jeder Block wird separat codiert).

Coderate R_c: Verhältnis zwischen Daten- und Übertragungssymbolen. $R_c = \frac{k}{n}$

6.3 Linearer Blockcode Seite 283

Gegeben sind die Code-Worte $a = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ und $b = (b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n)$ aus C. Ein Code ist linear, wenn für $c = a \oplus b \quad \in C$ gilt.
Merke: da $a \oplus a = (0, 0, 0, \ldots, 0)$ gehört auch der Nullvektor zu jedem linearen Code.

6.3.1 Systematischer Code (Seite 310 (290))

Ein Block-Code ist systematisch, falls: beim Linearen $(n, k) - Code$, mit k Datenbits(d_i) und n Codebits(c_j), sämtliche Datenbits(d_j) unmodifiziert an irgendwelchen Stellen c_j vorkommen.
Normalerweise ist ein systematischer Code wie folg aufgebaut: zuserst alle Datenbits: $c_i = d_i$ für $1 \leq i \leq k$ dann folgen die Paritybits: $c_{j+k} = p_j$ für $1 \leq j \leq n - k$

6.3.2 Hamming-Gewicht, Hamming-Distanz Seite 283

Hamming-Gewicht $w(c)$: $w(c)$ = Anzahl Einer des Codewortes c.

Hamming-Distanz $d(a, b)$: $d(a, b)$ = Anzahl unterschiedliche Stellen der beiden Codeworte a, b

Beziehungen: $w(c) = d(c, 0) \qquad d(a, b) = w(a \oplus b)$

6.3.3 Minimale Hamming-Distanz Siete 284

Die minimale Hamming Distanz eines Codes C entspricht dem Minimum der Distanz aller möglichen Codewort-Paare a_i, b_k
Die minimale Hamming Distanz eines **linearen** Codes C entspricht also dem kleinsten Gewicht alle Codeworte von C. Je grösser die minimale Distanz ist, desto mehr Stellen müssen verändert werden, um a_i in b_k umzuwandeln.

Minimale Hamming Distanz: $d_{min} = min[d(a,b)]$
Bei linearen Codes $d_{min} = min[d(a,b)] = min[w(a \oplus b)] = min[w(c)]$

6.3.4 Fehler erkennung und korrektur Seie 284

Die minimale Hamming-Distanz bestimmt die maximale Anzahl erkennbare oder sogar korrigierbare Symbolfehler.

Detektierbare Fehler: $t_d = d_{min} - 1$

Korrigierbare Fehler: $t_c = \frac{1}{2}(d_{min} - 1)$

6.3.5 Generatormatrix G Seite 285

Die Generatormatrix G beschreibt einen linearen Blockcode:

Gegeben: Code-vector $c = [c_1, c_2, \ldots, c_n]$ und Daten-vector $d = [d_1, d_2, \ldots, d_k]$
Wir haben ein Systematischer-Code vorliegen. Somit erhalten wir $(m = n - k)$:

$$\begin{aligned} c_1 &= d_1 \\ c_2 &= d_2 \\ &. \\ &. \\ c_{k+1} &= p_{11}d_1 \oplus p_{12}d_2 \oplus \ldots \oplus p_{1k}d_k \\ c_{k+2} &= p_{21}d_1 \oplus p_{22}d_2 \oplus \ldots \oplus p_{2k}d_k \\ &. \\ &. \\ c_{k+m} &= p_{m1}d_1 \oplus p_{m2}d_2 \oplus \ldots \oplus p_{mk}d_k \end{aligned}$$

$$= c = dG = [d_1\, d_2\, d_3\, d_4\, \cdots\, d_k] \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & p_{11} & p_{21} & \cdots & p_{m1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & p_{1k} & p_{2k} & \cdots & p_{mk} \end{bmatrix}$$

mit $\boldsymbol{G = [I_k\, P^T]}$ wobei I_k die k'te Einheitsmatrix und P^T die transponierte Paritätsmatrix ist.

Paritätsmatrix: $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mk} \end{bmatrix}$

Paritätsprüfmatrix H Seite 285: Mit der Paritätsprüfmatrix H erkennt man Übertragungsfehler:
- $H = [P\, I_m]$ $\quad P$:Paritätsmatrix, $\quad H : [m \times n]$ Matrix mit $m = n - k$
- Reihen von H sind ubabhängig
- $H^T = \begin{bmatrix} P^T \\ I_m \end{bmatrix}$
- $G \cdot H^T = [I_k\, P^T] \cdot \begin{bmatrix} P^T \\ I_m \end{bmatrix} = P^T \oplus P^T = 0 = [k \times m]$-Nullmatrix
- $c \cdot H^T = d \cdot G \cdot H^T = 0 = [1 \times m]$-Nullvektor

Paritätsprüfmatix H^T und Hamming-Distanz d_{min}:
Jedes **gültige** Codewort c multipliziert mit der transponierten Paritätsprüfmatrix H^T ergibt Null.
$c \cdot H^T = 0$
Merke: die minimale Hamming-Distanz d_{min} von C entspricht somit der minimalen Anzahl Zeilen von H^T, welche linear kombiniert Null ergeben.

6.3.6 Auswertung des Fehlersyndroms Seite 286

Das Fehlersyndrom s erlaubt die Erkennung und evtl. Korrektur von Übertragungsfehlern e. Wobei:
- c_r: Empfangenes Codewort der Länge n
- e: Error-Pattern der Länge n - $c_r = c \oplus e$

Syndrom $s = c_r \cdot H^T = (c \oplus e) \cdot H^T = c \cdot H^T \oplus e \cdot H^T = e \cdot H^T$

Bei einem Einzelfehler entspricht das Fehlersyndrom s gerade einer Zeile von H^T.
Sind alle Zeilen von H^T unterschiedlich, entspricht dies $d_{min} \geq 3$. Zugleich kann bei Einzelfehlern aus s das Fehlerbit ei eindeutig bestimmt und das empfangene Codewort c_r korrigiert werden.

6.3.7 Hamming Schranke Seite 285

Ein linearer (n, k)-Blockcode kann bis zu t Fehler korrigieren, falls n und k folgende Hamming-Schranke erfüllen:
$2^{n-k} \geq \sum\limits_{i=0}^{t} \binom{n}{i} = \sum\limits_{i=0}^{t} \dfrac{n!}{(n-1)!i!}$
- Diese Bedingung ist notwendig aber nicht hinreichend. (Massgebend sind die Linearität und die Hamming-Distanz d_{min})
- Gilt das Gleichheitszeichen, handelt es sich um einen so genannten perfekten Code.
- Einzelfehler korrigierende perfekte Codes nennt man Hamming-Codes.

6.4 Zyklische Blockcode Seite 286

Zyklische Blockcodes sind eine Untergruppe des linearen Blockcodes. Beim Zyklischen Blockcode ist jede zyklische Verschiebung eines Codewots c_1 ($\in C$) nach c_2 auch wieder ein gültiges Codewort von C.

Gegeben: Codewort $c = (c_0, c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{n-1})$ mit $c \in C$

Zyklische Verschiebung: $\sigma(c) = c^{(1)} = (c_{n-1}, c_0, c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{n-2})$
eine 2 Verschiebung ergäbe: $\sigma^2(c) = \sigma\{\sigma(c)\} = c^{(2)} = (c_{n-2}, c_{n-1}, c_0, c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{n-3})$

8-Ung: Eine Verschiebung um n ist gleich keiner Schiebung. $\sigma^n(c) = c$

Polynomschreibweise: Codewort $c = (c_0, c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{n-1})$ Zugehöriges Polynom: $c(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \ldots + c_{n-1}x^{n-1}$
- Beispiel: $c = (1, 0, 0, 1, 1, 0) \Rightarrow c(x) = 1 + x^3 + x^4$
- Im binären Fall sind Addition und Subtraktion identische Operatoren: $x^k + x^k = 0, \quad x^k - x^k = 0$
- Division: wir haben $f(x) = q(x) \cdot h(x) + r(x)$, $h(x)$ ist ein Faktor von $f(x)$, falls der Rest $r(x) = 0$
- Weisen zwei Polynome $a(x)$ und $b(x)$ bei der Division den gleichen Rest $r(x)$ auf, so wird dies wiefolg dargestellt: $a(x) = b(x) \quad (mod\, h(x))$
- Somit gilt für den Rest: $r(x) = f(x) \quad (mod\, h(x))$

6.4.1 Fundamentales Theorem für zyklische Codes Seite 287

alle Codewortpolynome eines (n, k) zyklischen Codes sind vielfache des Generatorpolynoms: $(x) = g_o + g_1x + g_2x^2 + g_3x^3 + \ldots + g_{n-k}x^{n-k}$
Mit $g(x)$ ein Faktorpolynom von $(x^n + 1)$, d.h. $(x^n + 1) = q(x) \cdot g(x)$ (Beiweis Schaum Seite 288 Formel 11.27)
Damit im (n, k)-Code alle Bits codiert sind, muss gelten: $g_0 = 1$ sowie $g_{n-k} = 1$ **Beispiel:** Zyklischer $(7, 4)$-Blockcode
$(x^7 + 1) = \underbrace{w\ddot{a}hlen}(x + 1) \cdot (\ldots) \Rightarrow (x^7 + 1)/(x + 1) = x^6 + x^5 + \ldots + x + 1$
$\Rightarrow (x^7 + 1) = (x + 1)(x^3 + x + 1)(X^3 + x^2 + 1)$ Da wir einen $(7, 4)$-Code haben benötigen wir ein Polynom $(k - 1) = 4 - 1 = 3$ten Grades. Wir wählen $(x^3 + x + 1)$ und multiplizieren mit den lin.unabh. Codeworten d_i

$$\Rightarrow G = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{array} \end{array}$$

Zuletzt möchten wir dies noch als Systematische-Codematrix darstellen.

$$\Rightarrow G = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} z_1 \oplus z_2 \oplus z_3 \\ z_2 \oplus z_3 \oplus z_4 \\ z_3 \oplus z_4 \\ z_4 \end{array} \end{array}$$